Çok Serbestlik Dereceli Sistemlerin Modal Analizi

Dr. Barış Erkuş

1 Hareket Denklemi

Verilen bir $N-$serbestlik dereceli sistemin hareket denklemi şu şekildedir:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)$$

Burada, $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{K}$, $N \times N$ boyutunda kütle, sönümleme ve rijitlik matrisleridir, $\mathbf{x}(t)$ $N \times 1$ boyutunda yerdeğiştirme vektörü ve $\mathbf{F}(t)$ $N \times 1$ boyutunda dış kuvvet vektörüdür. Tek yönlü deprem yükleri altında $\mathbf{F}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{x}_{\mathrm{g}}(t)$ olmaktadır. Burada $\ddot{x}_{\mathrm{g}}$ yer ivmesidir.

2 Rayleigh Yöntemi

Bu yöntemde sistemin, varsayılan (assumed) bir formu koruyarak salınım yaptığı kabul edilir. Bu form genelde $\boldsymbol{\psi}$ ile gösterilir ve $N-$serbestlik dereceli sistem için boyutu $N \times 1$ olan bir vektördür. Bu durumda yer değiştirmeler şu şekilde ifade edilebilir:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\psi} z(t)$$

Bu form, teoride sınır koşullarını sağladığı sürece herhangi (arbitrary) bir form olabilir. Ancak sonuçların kabul edilebilir olması için bu formun gerçek salınım formuna yakın bir form olması gerekir.

Gerçek salınım formu ise bazı yaklaşık yöntemler ile öngörülebilir ve genelde iki tür olabilir. Bu iki tür formu yansıtması nedeni ile örnek olarak deprem yükleri ve rüzgar yükleri için olası salınım formları aşağıda açıklanmıştır.

- Deprem yükleri için salınım formu atalet kuvvetleri ile yapı rijitlik kuvvetleri arasında dengeyi sağlayan formdur ki bu form aslında yapının doğal salınım şeklidir. Bu durumda ön görülen formun $\omega^2\mathbf{M}\boldsymbol{\psi} = \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}$ denklemini sağlanması beklenir. Bundan dolayı yapı kütlesi ile orantılı ve kütle dağılımını yansıtan bir statik yükleme altında oluşan yerdeğiştirmeler deprem yükleri için bir salınım formu olarak kabul edilebilir. Genelde bu form iteratif statik analizleri ile bulunabilir. (Not: Bu form özvektörlerden birisi ise $\boldsymbol{\psi}$ yerine $\boldsymbol{\phi}$, $z(t)$ yerine $q(t)$ ve ω yerine ω_{n} kullanılabilir.)

- Dinamik rüzgar yükleri yapı boyunca belli bir dağılım göstermektedir. Bu dağılım ile orantılı olan bir statik yükleme altında oluşan yerdeğiştirmeler rüzgar yükleri için yapılacak analizlerde salınım formu olarak kullanılabilir.

Rayleigh yönteminin özelliği bir adet form kullanmasıdır. Yerdeğiştime için yapılan kabul neticesinde, kinetik ve birim şekildeğiştirme enerjileri eşitlenirse hareket denklemi genelleştirilmiş denkleme dönüşür:

$$\bar{M}\ddot{z}(t) + \bar{C}\dot{z}(t) + \bar{K}z(t) = \bar{F}(t), \qquad \bar{M}\ddot{z}(t) + \bar{C}\dot{z}(t) + \bar{K}z(t) = -L\ddot{x}_{\mathrm{g}}(t)$$

$$\bar{M} = \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\boldsymbol{\psi}, \qquad \bar{C} = \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\boldsymbol{\psi}, \qquad \bar{K} = \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\boldsymbol{\psi}, \qquad \bar{F} = \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}, \qquad L = \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{r}$$

Burada $z(t)$ genelleştirilmiş serebestlik derecesidir ve salınım frekansı $\omega^2 = {}^{\bar{K}}/_{\bar{M}}$ olur.

3 Modal Analiz

Birçok yapıda bir adet form ve bu forma denk gelen genelleştirilmiş koordinat kullanılması uygun olabilir. Ancak, inşaat mühendisliği yapılarında bir adet form kullanımı yeterli olmaz. Bundan dolayı gerçek davranışı ifade etmek için ek formlar kullanılır. Birden fazla salınım formunun kullanılmasına yönelik olarak yapılabilecek ilk yöntem modal analiz neticesinde elde edilebilecek doğal mod şekillerinin kullanılmasıdır. Bölüm 1'de verilen sistemin $N-$adet doğal salınım modu ve bu modlara denk gelen doğal salınım frekansları olacaktır. Yerdeğiştirmeler tüm mod şekilleri ve genelleştirilmiş koordinatlar üzerinden ifade edilirse

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}\mathbf{q}(t)$$

Burada ve $\mathbf{q}(t)$ genelleştirilmiş serebestlik derecelerini ifade eden $N \times 1$ boyutunda vektördür ve $\mathbf{\Phi}$ salınım formlarını ifade eden $N \times N$ boyutunda bir matristir:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{\phi}_1 & \boldsymbol{\phi}_2 & \cdots & \boldsymbol{\phi}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Bu durumda genelleştirilmiş hareket denklemleri şu şekilde olacaktır:

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}(t) + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{q}(t) = \bar{\mathbf{F}}(t), \qquad \bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}(t) + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{q}(t) = -\mathbf{L}\ddot{x}_{\mathrm{g}}(t)$$

Burada

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}, \qquad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}, \qquad \bar{\mathbf{K}} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{\Phi}, \qquad \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}, \qquad \mathbf{L} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{r}$$

boyutu $N \times N$ olan genelleştirilmiş sistem matrisleridir.

Modal analizin en önemli avantajı, genelleştirilmiş kütle, genelleştirilmiş rijitlik ve klasik sönümleme matrisi kullanılırsa genelleştirilmiş sönüm matrislerinin tümünün diyagonal olmasıdır. Bundan dolayı asıl hareket denklemi $N \times N$ boyutunda genel bir matris diferensiyel denkleminden, birbirinden bağımsız $N-$adet skalar diferensiyel denklemlerine indirgenir.

Modal analiz ile ilgili bir kaç önemli zorluk mevcuttur. Bunlardan ilki, kullanılan mod sayısı ile ilgilidir. Yukarıda verilen formulasyonda, tüm modlar kullanılmıştır. Ancak özellikle yüksek modların hesabı, yüksek serbestlik dereceli sistemlerde mümkün olamamaktadır. Bundan dolayı, modal analizlerde tüm modları kullanmak yerine doğruluğu daha yüksek olduğu bilinen ilk $s-$adet mod şekli kullanılabilir. Yüksek modların yapısal cevaplara etkisi az olduğundan bu yöntem kabul edilebilir sonuçlar vermektedir. Bu durumda

$$\mathbf{\Phi}_{N\times s} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{\phi}_1 & \boldsymbol{\phi}_2 & \cdots & \boldsymbol{\phi}_s \\ | & | & & | \end{bmatrix}_{N\times s}, \qquad s < N$$

ve genelleştirilmiş matrislerinin boyutları $s \times s$'dir. Bu durumda $\mathbf{q}(t)$ $s \times 1$ boyutunda vektör olacaktır.

İkinci zorluk mod şekil vektörlerinin ($\boldsymbol{\phi}_i$) boyutları ile ilgilidir. Serbestlik derece sayısının (N) çok yüksek olduğu inşaat yapılarında, mod şekillerinin de boyutu çok yüksek olacaktır. Büyüklüğü çok yüksek olan mod şekillerinin yüksek doğrulukla hesaplanması her zaman mümkün olamamakta ve vakit alan bir işlem olmaktadır. Bu zorluğa aşımına yönelik olarak bazı yöntemler geliştirilmiştir. Bunlardan en önemlisi bir sonraki bölümde anlatılan Rayleigh-Ritz yöntemidir.

4 Rayleigh-Ritz Yöntemi

Bir önceki bölümde açıklandığı üzere, yüksek serbestlik dereceli sistemlerde bir salınım formu kullanımı uygun olmamaktadır. Doğal salınım modlarının kullanılması ile birbirinden bağımsız denklemler elde edilirken, hem salınım mod şekillerinin boyutu hem de sayısı açısından zorluklar ortaya çıkmaktadır. Mod şekillerinin sayısı azaltılarak bu zorluk bir derece azaltılabilir. Salınım formunu ifade eden vektör boyutunun azalımı ile ilgili olarak ise Ritz yöntemi (ya da Rayleigh-Ritz yöntemi) uygulanabilir.

Ritz yönteminde bu vektörler doğal salınım mod şekilleri olmak zorunda değildir. Bundan dolayı büyük serbestlik dereceli sistemler için çözümü zor ve vakit alan özvektör probleminin çözülmesine gerek yoktur. Bu vektörler seçilirken çözümü daha kolay olan iteratif yöntemler kullanılır. Buna örnek olarak Lanczos vektörleri ve yüklemeye bağlı Ritz vektörleri gösterilebilir. Bu vektörlerin doğal salınım mod şekillerinden en önemli farkı, diklik koşulları ile ilgilidir. Doğal salınım mod şekilleri birbirlerine kütle ve rijitlik matrisleri üzerinden diktirler ancak Lanczos ve yüklemeye bağlı Ritz vektöleri birbirlerine dik değillerdir. Bundan dolayı genelleştirilmiş matrisler diyagonal olmaz ve genelleştirilmiş hareket denklemleri birbirinden bağımsız skalar diferensiyel denklem olmazlar.

Ritz yönteminde $s-$adet salınım form vektörü ($\boldsymbol{\psi}_{i=1\to s}$) kullanılır. Bu durumda yer değiştirmeler şu şekilde ifade edilebilir:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\Psi}\mathbf{z}(t)$$

Burada ve $\mathbf{z}(t)$ genelleştirilmiş serebestlik derecelerini ifade eden $s \times 1$ boyutunda vektördür ve $\boldsymbol{\Psi}$ salınım formlarını ifade eden $N \times s$ boyutunda bir matristir:

$$\boldsymbol{\Psi}_{N\times s} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{\psi}_1 & \boldsymbol{\psi}_2 & \cdots & \boldsymbol{\psi}_s \\ | & | & & | \end{bmatrix}_{N\times s}, \qquad s < N$$

Bu durumda genelleştirilmiş hareket denklemi şu şekilde olur:

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{z}}(t) + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{z}}(t) + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{z}(t) = \bar{\mathbf{F}}(t), \qquad \bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{z}}(t) + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{z}}(t) + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{z}(t) = -\mathbf{L}\ddot{x}_{\mathrm{g}}(t)$$

Burada

$$\bar{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\boldsymbol{\Psi}, \qquad \bar{\mathbf{C}} = \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\boldsymbol{\Psi}, \qquad \bar{\mathbf{K}} = \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\boldsymbol{\Psi}, \qquad \bar{\mathbf{F}} = \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}, \qquad \mathbf{L} = \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{r}$$

genelleştirilmiş sistem matrisleri olup $\bar{\mathbf{M}}$, $\bar{\mathbf{C}}$ ve $\bar{\mathbf{K}}$ matrislerinin boyutları $s \times s$ ve $\bar{\mathbf{L}}$ vektörünün boyutu $s \times 1$ 'dir.

Yukarıda bahsedildiği üzere genelleştirilmiş matrisler diyagonal olmadıklarından, genelleştirilmiş denklem hala matris formundadır. Bu denklemin çözümü için bir özdeğer analizi yapılabilir. Genelleştirilmiş harekte denkleminin özdeğer problemi şu şekilde ifade edilebilir:

$$\overline{\mathbf{K}}\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{Z}} = \omega_{\mathbf{Z}}^2\overline{\mathbf{M}}\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{Z}}$$

Burada $\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{Z}}$ genelleştirilmiş hareket denkleminin özvektörüdür $s \times 1$ boyutundadır. Dikkat edilmesi gereken husus $\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{Z}}$, doğal salınım mod şekilleri olan $\boldsymbol{\phi}$'dan farklıdır ve bir salınım mod şekli değildir. Özdeğer problemlerinin doğası gereği genelleştirimiş kütle ve rijitlik matrisleri üzerinden diklik koşullarını sağlar:

$$\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{Z},i}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{M}}\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{Z},j} = 0, \qquad \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{Z},i}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{K}}\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{Z},j} = 0, \qquad i \neq j$$

Özvektörler boyutu $s \times s$ olan bir özvektör matrisi ile ifade edilebilir:

$$\mathbf{\Phi_Z} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{Z},1} & \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{Z},2} & \cdots & \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{Z},s} \\ | & | & & | \end{bmatrix}_{s \times s}$$

Bu durumda, genelleştirilmiş serbestlik dereceleri genelleştirilmiş sistem özvektörleri ve $s \times 1$ boyutunda yeni bir değişken vektör ile ifade edilebilir

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{\Phi_Z}\mathbf{y}(t)$$

Bu ifade yapının asıl serbestlik derecelerini ifade eden denklemde kullanılırsa şu denklem elde edilir.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi}\mathbf{\Phi_Z}\mathbf{y}(t)$$

Burada $N \times s$ boyutunda $\mathbf{\Phi_y}$ matrisi şu şekilde tanımlanırsa

$$\mathbf{\Phi_y} = \mathbf{\Psi}\mathbf{\Phi_Z}$$

yerdeğiştirmeler şu şekilde ifade edilebilir:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi_y}\mathbf{y}(t)$$

Burada $\mathbf{\Phi_y}$ ile ifade edilen matris asıl sistemin yaklaşık bir özvektörüdür. Bunun nedeni bu matris genelleştirilmiş kütle ve genelleştirilmiş sistem özvektörleri asıl denklem ile birleştirilirse diklik koşulunu sağlamaktadır (burada detaylı ispat verilmemiştir). Bu yaklaşık özvektörlerin normal mod şekillerinden en önemli farkı, elde edildikleri sistemin büyüklüğüdür. Normal mod şekilleri $N \times N$ boyutundaki orijinal sistemden elde edilirken, $\mathbf{\Phi_y}$ $s \times s$ boyutuna indirgenmiş genelleştirilmiş sistemden elde edilir. Bundan dolayı, $\mathbf{\Phi_y}$ matrisinin elde edilmesi daha az işlem gerektirmektedir.

Bu yöntem ile edilen $\mathbf{\Phi_y}$ vektörleri görüldüğü üzere, ilk başta seçilen $\mathbf{\Psi}$ vektörlerine bağlıdır. Bu noktada $\mathbf{\Psi}$ vektörlerinin seçimi için bir kaç yöntem mevcuttur. Bunlardan iki tanesi Lanczos koordinatları [1] ve yüklemeye dayalı Ritz vektörleridir [2]. Her iki yöntemde de ilk önce verilen bir yükleme altından statik yerdeğiştirme hesaplanır. Hesaplanan bu yerdeğiştirme ilk salınım vektörü, $\boldsymbol{\psi}_1$ olarak kabul edilir. Diğer vektörler ($\boldsymbol{\psi}_{i=2\rightarrow s}$) bu ilk vektörden türetilir. Görüldüğü üzere $\boldsymbol{\psi}$ vektörleri doğal mod şekilleri değildir ve bu vektörler ile elde edilen genelleştirilmiş sistemin frekansları doğal salınım frekansları olmaz.

References

[1] Bahram Nour-Omid and Ray W. Clough. Dynamic analysis of structures using lanczos co-ordinates. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 12(4):565–577, 1984.

[2] Edward L. Wilson, Ming-Wu Yuan, and John M. Dickens. Dynamic analysis by direct superposition of ritz vectors. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 10(6):813–821, 1982.